Total number of printed pages – 8

23R–25 (MAT3204C)

2025

MATHEMATICS

(MAJOR)

Paper : MAT3204C

(Real Analysis)

Full Marks : 60

Time : 2½ hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

1. Answer the following questions : $1 \times 7 = 7$

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) What can you say about $A \subseteq \mathbb{R}$ if $l.u.b\ A = g.l.b.\ A$?

সংহতি A ৰ বিষয়ে কি ক'ব পাৰি যদিহে $l.u.b\ A = g.l.b.\ A$ হয়।

(b) State the law of trichotomy on $\mathbb{R}$.

ট্ৰাইক'টমি নিয়মটো লিখা।

(c) Write down an example of a bounded set with nolimit point.

এটা সীমাৱদ্ধ সংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া যাৰ কোনো সীমাবিন্দু নাই।

(d) Write the set of limit points of the set Q of rational numbers.

পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি Q ৰ সীমা বিন্দুবোৰৰ সংহতিটো লিখা।

(e) Give *one* example of a bounded sequence which is not convergent.

এটা সীমাৱদ্ধ অনুক্ৰমৰ উদাহৰণ দিয়া যি অভিসাৰী হয়।

(f) What is the relationship between limsup and liminf of a convergent sequence ?

এটা অভিসাৰী অনুক্ৰমৰ limsup আৰু liminf ৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো লিখা।

(g) "Every conditionally convergent series is absolutely convergent". True **or** False. Justify.

"এটা চৰ্তসাপেক্ষে অভিসাৰী শ্ৰেণী সদায়েই নিঃচৰ্ত অভিসাৰী শ্ৰেণী হয়"। শুদ্ধ *নে* অশুদ্ধ, নাৰ্য্যতা প্ৰদান কৰা।

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Show that the set

$S=\left\{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},....\right\}$ is neither open nor closed.

দেখুওৱা যে $S=\left\{1,-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},....\right\}$ সংহতিটো মুক্ত আৰু বন্ধ সংহতি দুয়োটাই নহয়।

(b) If $a \in \mathbb{R}$ is such that $0 \le a < \in \forall \in > 0$ prove that $a = 0$.

যদি $a \in \mathbb{R}$ যাতে $0 \le a < \in \forall \in > 0$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $a = 0$ ।

(c) Prove that every convergent sequence is bounded.

প্ৰমাণ কৰা যে প্ৰতিটো অভিসাৰী অনুক্ৰম পৰিবদ্ধ।

(d) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ is not convergent.

দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী নহয়।

3. Answer the following questions : 5×3=15

তলৰ প্ৰশ্নবোৰৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) If greatest element of a subset A of $\mathbb{R}$ exists, then it will be the $l.u.b$ of A.

যদি $\mathbb{R}$ ৰ এটা উপসংহতি A ৰ সৰ্বোচ্চ উপাদান থাকে। তেন্তে সিয়ে A ৰ $l.u.b$ হ'ব।

(b) Define convergence of a sequence. If $0 < b < 1$, then show that $\lim_{n\to\infty}(b^n) = 0$.

শ্ৰেণীৰ অভিসাৰীতাৰ সংজ্ঞা লিখা। যদি $0 < b < 1$, তেন্তে দেখুওৱা যে $\lim_{n\to\infty}(b^n) = 0$ হয়।

Or

(c) What do you mean by sequence of partial sum of a series? Prove that if the series $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converges, then $\lim x_n = 0$. Is the converse true? Justify.

এটা শ্ৰেণীৰ আংশিক যোগফলৰ অনুক্ৰম বুলিলে কি বুজা? দেখুওৱা যে যদি $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ অভিসাৰী হয় তেন্তে $\lim x_n = 0$ হয়। ইয়াৰ বিপৰীতটো সত্যনে? যুক্তি দৰ্শোৱা।

(d) Show that the intersection of finite collection of open sets in $\mathbb{R}$ is open. Further, give an example to show that the intersection of infinitely many open sets in $\mathbb{R}$ may not be open.

দেখুওৱা যে $\mathbb{R}$ ত সসীম সংখ্যক মুক্ত সংহতিৰ সংগ্ৰহৰ ছেদন এটা মুক্ত সংহতি। এটা উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা যে $\mathbb{R}$ ত অসীম সংখ্যক মুক্ত সংহতিৰ ছেদন মুক্ত নহয়।

Or

(e) Using the definition of Cauchy sequence, prove that the sequence $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ is a cauchy sequence.

কচি অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি প্ৰমাণ কৰা যে $\left\langle \frac{1}{n} \right\rangle$ অনুক্ৰমটো এটা কচি অনুক্ৰম।

4. Answer *(a)* **or** *(b)* of the following :

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ *(a) অথবা (b)* ৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) State and prove the monotone convergence theorem. Show that

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$ 5+5=10

একস্বৰ অভিসৰণ উপপাদ্যটো লিখা আৰু প্ৰমাণ কৰা।

দেখুওৱা যে $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ হয়।

(b) Define cauchy sequence. Prove that a sequence of real numbers is convergent if and only if it is a cauchy sequence. 2+8=10

কচি অনুক্ৰমৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ এটা অনুক্ৰম অভিসাৰী হব যদি আৰু যদিহে ই এটা কচি অনুক্ৰম।

5. Answer *(a)* **or** *(b)* of the following : 10×1=10

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ *(a)* **অথবা** *(b)* ৰ উত্তৰ দিয়া ঃ

(a) Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converges for $p > 1$, diverges for $p \leq 1$. 10

দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ শ্ৰেণীটো $p > 1$ ৰ কাৰণে অভিসাৰী আৰু $p \leq 1$ ৰ বাবে অপসাৰী হয়।

Or

(b) Define alternating series. State the Leibnitz's test for alternating series. Show that $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ is convergent. Is it absolutely convergent? Justify your answer. 1+1+4+4=10

'অলতাৰনেটিং' শ্ৰেণীৰ সংজ্ঞা লিখা। লিবনিটজৰ উপপাদ্যটো লিখা। দেখুওৱা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী হয়। উপৰোক্ত শ্ৰেণীটো নিঃচৰ্তে অভিসাৰী হয়নে? সত্যাপন কৰা।

6. Answer *(a)* **or** *(b)* of the following questions : 10×1=10

নিম্নোক্ত প্ৰশ্নবোৰৰ *(a)* *অথবা* *(b)* ৰ উত্তৰ লিখা ঃ

(a) Let $a, b \in \mathbb{R}$ with $a < b$. Then, show that there exists $r \in Q$ (the set of rational nos). Such that $a < x < b$. 5+5=10

Prove that $(0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$.

ধৰা হ'ল $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$। তেন্তে দেখুওৱা যে $r \in Q$ (পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি) যাতে $a < x < b$. হয়। প্ৰমাণ কৰা যে

$$(0,1] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) \text{ হয়।}$$

(b) Discuss the convergence of the sequence defined as

$$x_1 = 8,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2,\ n \in \mathbb{N}$$

Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ is convergent. 5+5=10

তলৰ সংজ্ঞাবদ্ধ অনুক্ৰমটোৰ অভিসাৰীতা আলোচনা কৰা ঃ

$$x_1 = 8,\ x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + 2,\ n \in \mathbb{N}$$

প্ৰমাণ কৰা যে $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ শ্ৰেণীটো অভিসাৰী।